XVII Olimpíada de Matemática do Grande ABC

Nível 4

1ª FASE – 14 de agosto de 2021

Atenção: A ficha abaixo deve ser preenchida e devolvida.

Nome:	
Endereço:	
Cidade:	**Estado:**
Telefone:	**Ano/Série:**
Email:	
Colégio:	

Leia atentamente as instruções antes do início da prova.

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de **3 horas**.
2. O **tempo mínimo** de prova é de 1 hora.
3. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
4. Cada questão tem cinco alternativas de resposta: (A), (B), (C), (D), (E), e **apenas uma** delas é correta.
5. **Marque suas respostas abaixo da seguinte forma ■ .**
6. Marque apenas uma alternativa para cada questão. **Atenção: se marcar mais de uma alternativa, perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas marcadas seja a correta.**
7. **Não é permitido o uso de calculadoras** nem consultas a notas ou livros.
8. Ao final da prova, entregue apenas esta folha.

PARA PREENCHIMENTO EXCLUSIVO DO ALUNO:

Respostas

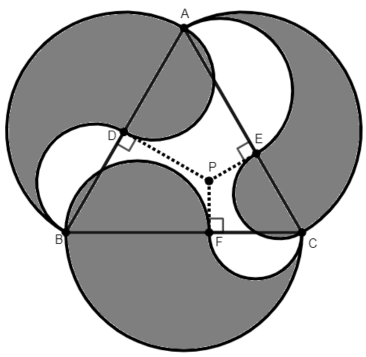
Questão 01	A	B	C	D	E	Questão 11	A	B	C	D	E
Questão 02	A	B	C	D	E	Questão 12	A	B	C	D	E
Questão 03	A	B	C	D	E	Questão 13	A	B	C	D	E
Questão 04	A	B	C	D	E	Questão 14	A	B	C	D	E
Questão 05	A	B	C	D	E	Questão 15	A	B	C	D	E
Questão 06	A	B	C	D	E	Questão 16	A	B	C	D	E
Questão 07	A	B	C	D	E	Questão 17	A	B	C	D	E
Questão 08	A	B	C	D	E	Questão 18	A	B	C	D	E
Questão 09	A	B	C	D	E	Questão 19	A	B	C	D	E
Questão 10	A	B	C	D	E	Questão 20	A	B	C	D	E

PARA PREENCHIMENTO EXCLUSIVO DO PROFESSOR:

TOTAL DOS PONTOS NA PRIMEIRA FASE:

Universidade Metodista de São Paulo

(1) Considere P um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC, cuja medida do lado é 4. Sejam D, F e G pontos tais que DP é perpendicular a AB, PE é perpendicular a AC, e PF é perpendicular a BC, respectivamente. São desenhados 9 arcos de circunferência $\widehat{AB}, \widehat{DA}, \widehat{BD}, \widehat{AC}, \widehat{AE}, \widehat{EC}, \widehat{BC}, \widehat{BF}, \widehat{FC}$. Qual é a área da região destacada?



(a) 24π

(b) 8π

(c) 6π

(d) 4π

(e) 2π

(2) Efetuando-se a soma

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 2019 \cdot 2020 \cdot 2021,$$

obtemos o valor:

(a) $3\binom{2021}{4}$

(b) $6\binom{2022}{3}$

(c) $4\binom{2021}{3}$

(d) $6\binom{2022}{4}$

(e) $6\binom{2021}{4}$

(3) Se a, b e c são três números reais tais que $a + b + c = -1, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ e $a^3 + b^3 + c^3 = 1$, então abc é igual a:

(a) 0

(b) -1

(c) 1

(d) $\dfrac{1}{5}$

(e) $\dfrac{2}{3}$

(4) Carlos resolveu preparar chapéus para os convidados de sua festa de aniversário. Para isso, resolveu desenhá-los na forma de cone circular reto, utilizando papel *couché*. As medidas, em centímetros, do raio da base, da altura e da geratriz formam uma progressão aritmética de razão 5. Para sua surpresa, no dia da festa, vieram 16% pessoas a mais, e Carlos precisou usar mais papel *couché* para fazer os chapéus às pressas para estes convidados. Ainda assim, Carlos usou menos do que 70000cm^2 de papel *couché*. Quantas pessoas foram inicialmente convidadas para a festa de Carlos?

(a) 49

(b) 50

(c) 51

(d) 52

(e) 53

(5) Paulo foi a uma sorveteria para comprar um sorvete de massa de três bolas. Ele já tinha decidido quais os sabores: coco, abacaxi e morango, mas estava em dúvida se comprava todas as bolas de um mesmo sabor, se escolhia só dois dos três sabores, ou pedia uma bola de cada sabor. Por fim, decidiu e fez o pedido. Acontece que na hora de preparar o pedido, o sorveteiro esqueceu a opção feita por Paulo, lembrou só dos sabores citados por Paulo enquanto decidia. Mesmo assim resolveu arriscar e preparou o pedido, já que Paulo já tinha comprado na sorveteria outras vezes, fazendo sempre a mesma opção. Qual a probabilidade do sorveteiro ter acertado o pedido do Paulo?

(a) $\dfrac{1}{10}$

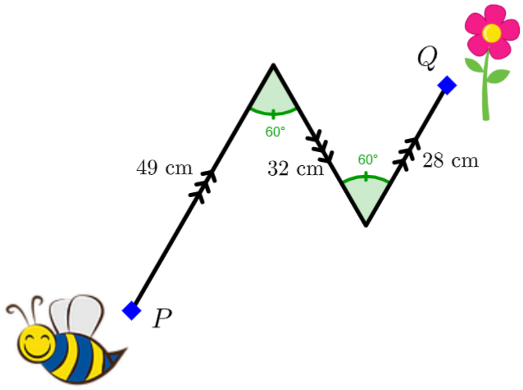
(b) $\dfrac{1}{5}$

(c) $\dfrac{1}{3}$

(d) $\dfrac{1}{2}$

(e) $\dfrac{2}{3}$

(6) Num jardim, uma abelha está no ponto inicial P, e avista uma flor no ponto Q. Como esta abelha se move de forma muito peculiar, ela fez o caminho indicado na figura abaixo, percorrendo no total 109 centímetros.



Se ela tivesse voado em linha reta, quantos centímetros a menos esta abelha teria percorrido?

(a) 36 cm

(b) 42 cm

(c) 49 cm

(d) 60 cm

(e) 67 cm

(7) Sônia começou a ler um livro na segunda-feira. Neste dia, ela leu $\frac{2}{9}$ do total de páginas do livro. No dia seguinte, ela leu $\frac{3}{8}$ das páginas restantes, e na quarta-feira, $\frac{5}{7}$ das páginas que ainda restavam. Na quinta-feira, Sônia conseguiu terminar de ler o livro, tendo lido as últimas 20 páginas que faltavam. Quantas páginas tem o livro que Sônia leu?

(a) 144

(b) 180

(c) 192

(d) 288

(e) 420

(8) Se $\log_4 3 = a$, então $\log_{27} 108$ é igual a

(a) 4

(b) $3a$

(c) $\dfrac{3a+1}{3a}$

(d) $\dfrac{a+3}{a}$

(e) 6

(9) Maria vai à feira e percebe que se comprar 3 dúzias de laranjas, 3 dúzias de bananas e 2 dúzias de maçãs gastaria 51 reais, mas se comprasse 2 dúzias de laranjas, 4 dúzias de bananas e 3 dúzias de maçãs gastaria 67 reais. Quanto Maria gastaria se comprasse 8 dúzias de laranjas, 4 dúzias de bananas e 2 dúzias de maçãs?

(a) 119 reais

(b) 90 reais

(c) 80 reais

(d) 70 reais

(e) 60 reais

(10) Um certo número de dois algarismos não nulos é tal que invertendo a ordem de seus algarismos obtemos um segundo número, que adicionado a ele próprio resulta 132. Se a diferença entre o maior e o menor algarismo deste número é 4, então a soma dos quadrados dos algarismos deste número é igual a

(a) 25

(b) 80

(c) 100

(d) 121

(e) 144

(11) Qual é o período da dízima periódica de $\dfrac{1}{3^{2021}}$?

(a) 1

(b) 3^{2016}

(c) 3^{2017}

(d) 3^{2018}

(e) 3^{2019}

(12) Suponha que as raízes reais da equação de segundo grau $ax^2+bx+c=0$ são $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{tg}\beta$. Se $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{8}$, então o valor de $\dfrac{c-a}{b}$ é

(a) 1

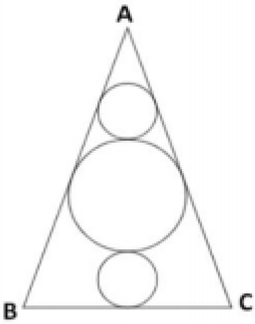
(b) $\sqrt{2}-1$

(c) $\sqrt{2}+1$

(d) $\sqrt{3}-2$

(e) $\sqrt{3}+2$

(13) Na figura a seguir, a circunferência superior e a inferior possuem raios iguais a 1 cm e a circunferência do centro possui raio igual a 2cm. A circunferência superior e a do centro são tangentes aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC e tangentes externamente uma à outra. A circunferência inferior é tangente ao lado $\overline{BC}$ e tangente externamente à circunferência do centro. Sabendo que os centros das três circunferências estão alinhados, qual a área do triângulo ABC?



(*a*) 20 cm^2

(*b*) 25 cm^2

(*c*) $20\sqrt{2}$ cm^2

(*d*) $25\sqrt{2}$ cm^2

(*e*) 30 cm^2

(14) Manoel e Carolina possuem diversos potes de geleia, cada um pesando uma certa quantidade de gramas. O peso total de todos os potes de geleia de Manoel é 15 vezes maior do que o peso total de todos os potes de Carolina. Manoel deu a Carolina o pote de geleia mais leve que ele tinha, e após isso, o peso dos potes que ele tinha passou a ser 8 vezes maior do que o peso total dos potes de Carolina. Qual é o maior número de potes de geleia que Carolina poderia ter originalmente?

(*a*) 19

(*b*) 18

(*c*) 17

(*d*) 16

(*e*) 15

(15) Considere N um número natural tal que $N!$ termina com uma quantidade de zeros que é o dobro da quantidade de zeros com a qual termina o número $(N-38)!$. Invertendo-se a ordem dos algarismos de N, obtém-se outro número que satisfaz essa condição. É correto afirmar que o menor valor de N é

(*a*) 74

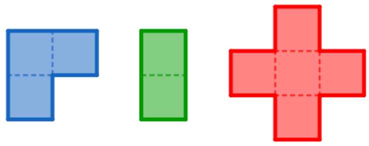
(*b*) 78

(*c*) 79

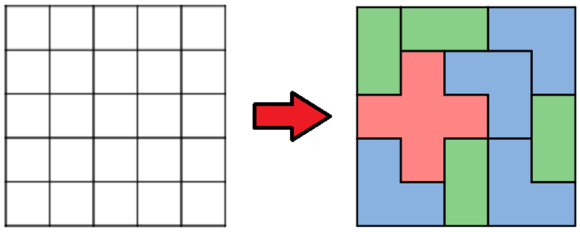
(*d*) 85

(*e*) 86

(16) A loja de tapetes persas de Gabriel pretende inovar e criar um novo tipo de alfombra, utilizando para isso as 3 figuras geométricas seguintes:



Ele fez o esboço da alfombra a partir de uma grade 5×5, e a preencheu utilizando as formas acima, usando todas ao menos uma vez, permitindo inclusive rotações das figuras. Abaixo, temos a grade construída e um exemplo de desenho para a alfombra.



Quantos modelos de alfombra diferentes Gabriel pode obter?

(*a*) 156

(*b*) 204

(*c*) 216

(*d*) 228

(*e*) 272

(17) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, a matriz A^{2021} é igual a:

(*a*) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

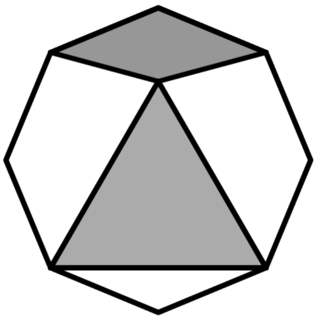
(*b*) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(*c*) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(*d*) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(*e*) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(18) Para fazer a modelagem de uma antena de televisão portátil para a empresa na qual trabalha, Luan utilizou inicialmente um octógono regular como base para o desenho, e utilizou um triângulo equilátero cujos dois vértices coincidem com vértices do octógono, como mostrado na figura abaixo, sendo a parte destacada em cinza o molde para a antena.



Qual é a razão entre a área em cinza e a área do octógono regular?

(*a*) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{8}$.

(*b*) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{8}$.

(*c*) $\dfrac{1}{4}$.

(*d*) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

(*e*) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$.

(19) Um certo dia Paulo falou para Maria:
— Você percebeu que se eu tivesse nascido 2 anos antes de você, hoje eu teria o dobro da sua idade e que quatro anos atrás eu tinha o triplo da sua idade?

Considerando que as afirmações de Paulo são verdadeiras, quantos anos atrás Paulo tinha o quíntuplo da idade de Maria?

(*a*) 5

(*b*) 6

(*c*) 7

(*d*) 8

(*e*) 9

(20) João escreveu na lousa todos os números naturais de 1 a 100. A seguir, substituiu todos os múltiplos de 3 pelo número 4 e depois, substituiu todos os múltiplos de 4 pelo número 3. Qual a soma de todos os números escritos na lousa ao final destas operações?

(*a*) 5050

(*b*) 4599

(*c*) 3499

(*d*) 2649

(*e*) 2525