



**Atenção: A ficha abaixo deve ser preenchida e devolvida.**

Nome:	
Endereço:	
Cidade:	Estado:
Telefone:	Ano/Série:
Email:	
Colégio:	

**Leia atentamente as instruções antes do início da prova.**

### INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de **3 horas**.
2. O **tempo mínimo** de prova é de 1 hora.
3. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
4. Cada questão tem cinco alternativas de resposta: (A), (B), (C), (D), (E), e **apenas uma** delas é correta.
5. **Marque suas respostas abaixo da seguinte forma** ■ .
6. Marque apenas uma alternativa para cada questão. **Atenção: se marcar mais de uma alternativa, perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas marcadas seja a correta.**
7. **Não é permitido o uso de calculadoras** nem consultas a notas ou livros.
8. Ao final da prova, entregue apenas esta folha.

**PARA PREENCHIMENTO EXCLUSIVO DO ALUNO:**

### Respostas

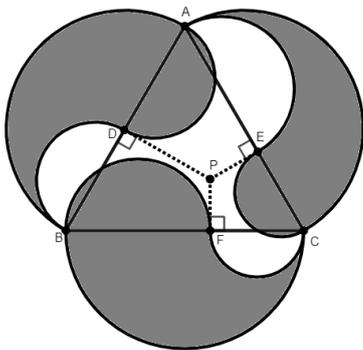
Questão 01	A	B	C	D	E	Questão 11	A	B	C	D	E
Questão 02	A	B	C	D	E	Questão 12	A	B	C	D	E
Questão 03	A	B	C	D	E	Questão 13	A	B	C	D	E
Questão 04	A	B	C	D	E	Questão 14	A	B	C	D	E
Questão 05	A	B	C	D	E	Questão 15	A	B	C	D	E
Questão 06	A	B	C	D	E	Questão 16	A	B	C	D	E
Questão 07	A	B	C	D	E	Questão 17	A	B	C	D	E
Questão 08	A	B	C	D	E	Questão 18	A	B	C	D	E
Questão 09	A	B	C	D	E	Questão 19	A	B	C	D	E
Questão 10	A	B	C	D	E	Questão 20	A	B	C	D	E

**PARA PREENCHIMENTO EXCLUSIVO DO PROFESSOR:**

TOTAL DOS PONTOS NA PRIMEIRA FASE:



(1) Considere  $P$  um ponto no interior de um triângulo equilátero  $ABC$ , cuja medida do lado é 4. Sejam  $D$ ,  $F$  e  $G$  pontos tais que  $DP$  é perpendicular a  $AB$ ,  $PE$  é perpendicular a  $AC$ , e  $PF$  é perpendicular a  $BC$ , respectivamente. São desenhados 9 arcos de circunferência  $\widehat{AB}, \widehat{DA}, \widehat{BD}, \widehat{AC}, \widehat{AE}, \widehat{EC}, \widehat{BC}, \widehat{BF}, \widehat{FC}$ . Qual é a área da região destacada?

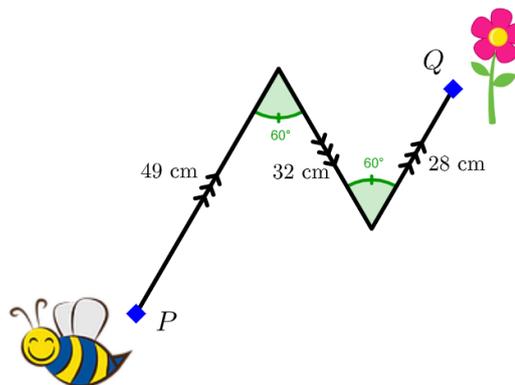


- (a)  $24\pi$
- (b)  $8\pi$
- (c)  $6\pi$
- (d)  $4\pi$
- (e)  $2\pi$

(2) Vinícius, William, Xavier, Yasmim e Zara resolveram criar um jogo. Inicialmente, cada um escolhe um número de pelo menos dois algarismos, e então o soma com o número obtido ao inverter os algarismos do número original. Eles repetem o procedimento até encontrar um número palíndromo, ou seja, um número que é o mesmo se lido da direita para a esquerda ou da esquerda para direita. Por exemplo, se um deles escolhesse o número 57, obteriam um palíndromo após realizar a operação 2 vezes, pois  $57 + 75 = 132$  e  $132 + 231 = 363$ . Ganha o jogo quem obtiver um palíndromo após repetir a operação a menor quantidade possível de vezes. Se Vinícius, William, Xavier, Yasmim e Zara escolheram os números 5726, 3735, 353, 175 e 78, respectivamente, é correto dizer que quem venceu o jogo foi

- (a) Vinícius
- (b) William
- (c) Xavier
- (d) Yasmim
- (e) Zara

(3) Num jardim, uma abelha está no ponto inicial  $P$ , e avista uma flor no ponto  $Q$ . Como esta abelha se move de forma muito peculiar, ela fez o caminho indicado na figura abaixo, percorrendo no total 109 centímetros.



Se ela tivesse voado em linha reta, quantos centímetros a menos esta abelha teria percorrido?

- (a) 36 cm
- (b) 42 cm
- (c) 49 cm
- (d) 60 cm
- (e) 67 cm

(4) Um certo dia Paulo falou para Maria:  
— Você percebeu que se eu tivesse nascido 2 anos antes de você, hoje eu teria o dobro da sua idade e que quatro anos atrás eu tinha o triplo da sua idade?

Considerando que as afirmações de Paulo são verdadeiras, quantos anos atrás Paulo tinha o quádruplo da idade de Maria?

- (a) 6
- (b) 7
- (c) 8
- (d) 9
- (e) 10

(5) João escreveu na lousa todos os números naturais de 1 a 100. A seguir, substituiu todos os múltiplos de 3 pelo número 4. Qual a soma de todos os números escritos na lousa ao final destas operações?

- (a) 5050
- (b) 4599
- (c) 4600
- (d) 3499
- (e) 3300



(6) Num triângulo  $ABC$ , cujos lados medem  $AB = 12m$ ,  $AC = 10m$  e  $BC = 15m$ , considere um ponto  $D$  sobre o lado  $\overline{BC}$  tal que o triângulo  $ABD$  seja obtusângulo e  $AD = 8m$ . Qual a medida do segmento  $\overline{BD}$ ?

(a)  $\frac{27}{5}m$

(b)  $\frac{20}{3}m$

(c)  $\frac{25}{3}m$

(d)  $\frac{7}{4}m$

(e)  $\frac{20}{7}m$

(7) Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ , a matriz  $A^{2021}$  é igual a:

(a)  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e)  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(8) João cria apenas galinhas e porcos em seu sítio e possui no total 30 animais. Num certo dia ele adquiriu mais  $x$  porcos e vendeu  $y$  galinhas ficando exatamente com o mesmo número de porcos e de galinhas. Se ao invés de adquirir  $x$  porcos e vender  $y$  galinhas, ele tivesse adquirido  $x$  galinhas e vendido  $y$  porcos, então ele ficaria com:

(a)  $x + y$  porcos a mais do que galinhas.

(b)  $x + y$  porcos a menos do que galinhas.

(c) o mesmo número de porcos e galinhas.

(d)  $2x + 2y$  porcos a mais do que galinhas.

(e)  $2x + 2y$  porcos a menos do que galinhas.

(9) Se  $\log_4 3 = a$ , então  $\log_{27} 108$  é igual a

(a) 4

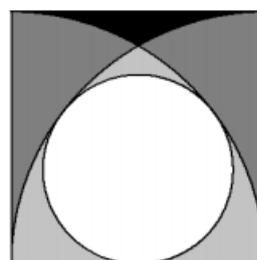
(b)  $3a$

(c)  $\frac{3a+1}{3a}$

(d)  $\frac{a+3}{a}$

(e) 6

(10) O logotipo de uma certa empresa tem a forma de um quadrado de lado igual a 4 cm, representado na figura abaixo:



No interior do quadrado, o círculo branco é tangente a dois arcos de circunferência com centros nos vértices do quadrado. Qual o raio do círculo branco?

(a) 1,2 cm

(b) 1,3 cm

(c) 1,4 cm

(d) 1,5 cm

(e) 1,6 cm

(11) Manoel e Carolina possuem diversos potes de geleia, cada um pesando uma certa quantidade de gramas. O peso total de todos os potes de geleia de Manoel é 15 vezes maior do que o peso total de todos os potes de Carolina. Manoel deu a Carolina o pote de geleia mais leve que ele tinha, e após isso, o peso dos potes que ele tinha passou a ser 8 vezes maior do que o peso total dos potes de Carolina. Qual é o maior número de potes de geleia que Carolina poderia ter originalmente?

(a) 19

(b) 18

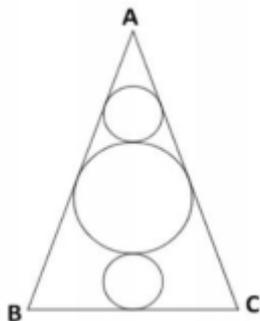
(c) 17

(d) 16

(e) 15



(12) Na figura a seguir, a circunferência superior e a inferior possuem raios iguais a 1 cm e a circunferência do centro possui raio igual a 2cm. A circunferência superior e a do centro são tangentes aos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$  e tangentes externamente uma à outra. A circunferência inferior é tangente ao lado  $\overline{BC}$  e tangente externamente à circunferência do centro. Sabendo que os centros das três circunferências estão alinhados, qual a área do triângulo  $ABC$ ?



- (a)  $20 \text{ cm}^2$
- (b)  $25 \text{ cm}^2$
- (c)  $20\sqrt{2} \text{ cm}^2$
- (d)  $25\sqrt{2} \text{ cm}^2$
- (e)  $30 \text{ cm}^2$

(13) Considere  $N$  um número natural tal que  $N!$  termina com uma quantidade de zeros que é o dobro da quantidade de zeros com a qual termina o número  $(N - 38)!$ . Invertendo-se a ordem dos algarismos de  $N$ , obtém-se outro número que satisfaz essa condição. É correto afirmar que o menor valor de  $N$  é

- (a) 74
- (b) 78
- (c) 79
- (d) 85
- (e) 86

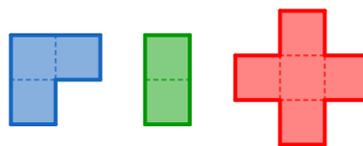
(14) Qual é o período da dízima periódica de  $\frac{1}{3^{2021}}$ ?

- (a)  $3^{2020}$
- (b)  $3^{2019}$
- (c)  $3^{2018}$
- (d)  $3^{2017}$
- (e) 1

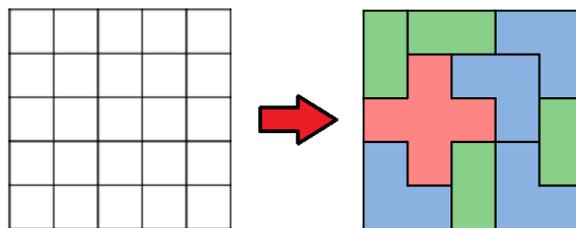
(15) Maria vai à feira e percebe que se comprar 3 dúzias de laranjas, 3 dúzias de bananas e 2 dúzias de maçãs gastaria 51 reais, mas se comprasse 2 dúzias de laranjas, 4 dúzias de bananas e 3 dúzias de maçãs gastaria 67 reais. Quanto Maria gastaria se comprasse 8 dúzias de laranjas, 4 dúzias de bananas e 2 dúzias de maçãs?

- (a) 119 reais
- (b) 90 reais
- (c) 80 reais
- (d) 70 reais
- (e) 60 reais

(16) A loja de tapetes persas de Gabriel pretende inovar e criar um novo tipo de alfombra, utilizando para isso as 3 figuras geométricas seguintes:



Ele fez o esboço da alfombra a partir de uma grade  $5 \times 5$ , e a preencheu utilizando as formas acima, usando todas ao menos uma vez, permitindo inclusive rotações das figuras. Abaixo, temos a grade construída e um exemplo de desenho para a alfombra.



Quantos modelos de alfombra diferentes Gabriel pode obter?

- (a) 156
- (b) 204
- (c) 216
- (d) 228
- (e) 272



(17) Um prédio comercial possui um elevador para auxiliar o deslocamento das pessoas entre os andares. Num certo andar, Maria pegou o elevador e ficou nele enquanto este passava por 12 andares. Ao sair do elevador, entrou Paulo, que ficou no elevador enquanto este passava por 7 andares. Ao sair do elevador, subiram João e Júlia. João desceu após o elevador passar por 15 andares, e Júlia, após o elevador passar por 11 andares. Considerando que este elevador começa do andar térreo, qual é a menor quantidade de andares que este prédio comercial pode ter?

- (a) 20
- (b) 19
- (c) 18
- (d) 17
- (e) 16

(18) Paulo foi a uma sorveteria para comprar um sorvete de massa de três bolas. Ele já tinha decidido quais os sabores: coco, abacaxi e morango, mas estava em dúvida se comprava todas as bolas de um mesmo sabor, se escolhia só dois dos três sabores, ou pedia uma bola de cada sabor. Por fim, decidiu e fez o pedido. Acontece que na hora de preparar o pedido, o sorveteiro esqueceu a opção feita por Paulo, lembrou só dos sabores citados por Paulo enquanto decidia. Mesmo assim resolveu arriscar e preparou o pedido, já que Paulo já tinha comprado na sorveteria outras vezes, fazendo sempre a mesma opção. Qual a probabilidade do sorveteiro ter acertado o pedido do Paulo?



- (a)  $\frac{1}{10}$
- (b)  $\frac{1}{5}$
- (c)  $\frac{1}{3}$
- (d)  $\frac{1}{2}$
- (e)  $\frac{2}{3}$

(19) Carlos resolveu preparar chapéus para os convidados de sua festa de aniversário. Para isso, resolveu desenhá-los na forma de cone circular reto, utilizando papel *couché*. As medidas, em centímetros, do raio da base, da altura e da geratriz formam uma progressão aritmética de razão 5. Para sua surpresa, no dia da festa, vieram 16% de pessoas a mais, e Carlos precisou usar mais papel *couché* para fazer os chapéus às pressas para estes convidados. Ainda assim, Carlos usou menos do que  $70000\text{cm}^2$  de papel *couché*. Quantas pessoas foram inicialmente convidadas para a festa de Carlos?

- (a) 49
- (b) 50
- (c) 51
- (d) 52
- (e) 53

(20) Se  $a, b$  e  $c$  são três números reais tais que  $a+b+c = -1$ ,  $a^2+b^2+c^2 = 1$  e  $a^3+b^3+c^3 = 1$ , então  $abc$  é igual a:

- (a) 0
- (b) -1
- (c) 1
- (d)  $\frac{1}{5}$
- (e)  $\frac{2}{3}$