XVI Olimpíada de Matemática do Grande ABC

Nível 4

1ª FASE – 04 de junho de 2019

Atenção: A ficha abaixo deve ser preenchida e devolvida.

Nome:	
Endereço:	
Cidade:	**Estado:**
Telefone:	**Ano/Série:**
Email:	
Colégio:	

Leia atentamente as instruções antes do início da prova.

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de **3 horas**.
2. O **tempo mínimo** de prova é de 1 hora.
3. A prova pode ser feita a lápis ou a caneta.
4. Cada questão tem cinco alternativas de resposta: (A), (B), (C), (D), (E), e **apenas uma** delas é correta.
5. **Marque suas respostas abaixo da seguinte forma ■ .**
6. Marque apenas uma alternativa para cada questão. **Atenção: se marcar mais de uma alternativa, perderá os pontos da questão, mesmo que uma das alternativas marcadas seja a correta.**
7. **Não é permitido o uso de calculadoras** nem consultas a notas ou livros.
8. Ao final da prova, entregue apenas esta folha.

PARA PREENCHIMENTO EXCLUSIVO DO ALUNO:

Respostas

Questão 01	A	B	C	D	E	Questão 11	A	B	C	D	E
Questão 02	A	B	C	D	E	Questão 12	A	B	C	D	E
Questão 03	A	B	C	D	E	Questão 13	A	B	C	D	E
Questão 04	A	B	C	D	E	Questão 14	A	B	C	D	E
Questão 05	A	B	C	D	E	Questão 15	A	B	C	D	E
Questão 06	A	B	C	D	E	Questão 16	A	B	C	D	E
Questão 07	A	B	C	D	E	Questão 17	A	B	C	D	E
Questão 08	A	B	C	D	E	Questão 18	A	B	C	D	E
Questão 09	A	B	C	D	E	Questão 19	A	B	C	D	E
Questão 10	A	B	C	D	E	Questão 20	A	B	C	D	E

PARA PREENCHIMENTO EXCLUSIVO DO PROFESSOR:

TOTAL DOS PONTOS NA PRIMEIRA FASE:

Universidade Metodista de São Paulo

1) Seja $N = 9 \times 19 \times 29 \times \ldots \times 2009 \times 2019$ o produto dos números naturais ímpares terminados em 9, de 9 a 2.019. Escrevendo N na forma decimal, qual o algarismo das dezenas?
a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

2) Seja N_1 = abcd um número natural de 4 algarismos. Invertendo a ordem dos dois primeiros algarismos, obtemos um número natural N_2, tal que N_1-N_2=2700. Invertendo a ordem dos dois algarismos do meio, obtemos um número natural N_3, tal que N_1-N_3=360. Invertendo a ordem dos dois últimos algarismos, obtemos um número natural N_4, tal que N_1-N_4=18. Se $N_5=a^2+b^2+c^2+d^2$, então podemos dizer que a raiz quadrada de N_5 é
a) 13
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

3) João desenhou um polígono regular com 2019 lados, e sobre cada lado desenhou um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular e assim sucessivamente, e no final suprimiu os lados originais, obtendo uma nova figura. Quantos vértices tem essa figura?
a) 1010x2019
b) 1010x2018
c) 1011x2019
d) 1011x2018
e) 1011x2020

4) Uma prova de matemática tem no total 20 questões de múltipla escolha. Cada resposta correta vale 15 pontos, e a cada resposta errada o aluno perde 4 pontos. Rafael, Carolina e José responderam todas as perguntas do questionário, e a nota média dos 3 foi 167, que coincidiu com a nota obtida por Carolina. Sabendo que José tirou a menor nota entre os 3, e que Rafael acertou 4 questões a mais que José, qual foi a porcentagem de acertos de questões de Rafael nessa prova?
a) 55%
b) 65%
c) 75%
d) 80%
e) 85%

5) Pedro resolveu fazer uma doação de bolinhas de gude, que ele e seus irmãos juntaram durante muitos anos, para os meninos de uma comunidade pobre. Ao contá-las, verificou que tinham 960 bolinhas azuis, 1080 bolinhas verdes e 1200 bolinhas marrons. Sabendo que Pedro preparou o maior número possível de kits iguais, de modo que cada um deles continha a mesma quantidade de bolinhas de cada cor e exatamente 4 bolinhas verdes a mais do que bolinhas azuis, então o número de kits preparados por Pedro foi igual a
a) 10
b) 12
c) 30
d) 60
e) 120

6) Seja:

$$x = \log_2\left(\log_3\left(64^{\log_{19}(9)\log_4(19)}\right) + 9^{\log_2(5)\log_3(2)} + 4^{\log_7(3)\log_2(7)}\right),$$

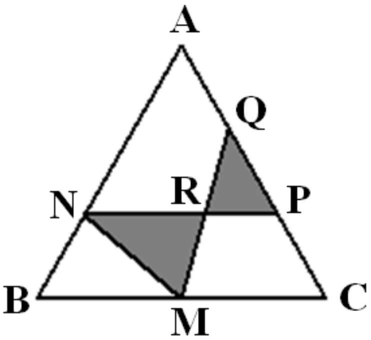
então a soma dos algarismos de 4^x é igual a
a) 13
b) 12
c) 10
d) 8
e) 7

7) De quantas maneiras pode-se escrever 87 como soma de três números inteiros que estão em progressão geométrica?
a) 8
b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

8) Considere um triângulo retângulo ABC, com $A\hat{B}C = 90^o$. Seja H o pé da altura que vai de B até o lado AC. Uma reta paralela ao lado AB que passa pelo ponto C corta a reta BH no ponto D. Uma reta paralela ao lado BC, passando pelo ponto D corta AC em E. Qual é o menor ângulo entre as retas AD e BE?
a) 120º
b) 90º
c) 75º
d) 60º
e) 45º

9) Sabe-se que 111 = 3·37. Quantos algarismos tem o próximo número da forma 11...1; isto é, cujos algarismos são todos iguais a 1, e que também é divisível por 37?
   a) 4
   b) 5
   c) 6
   d) 7
   e) 8

10) Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero, M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, o segmento $\overline{NP}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$, os pontos M, R e Q são colineares, AB=3m e BN=PQ=1m.

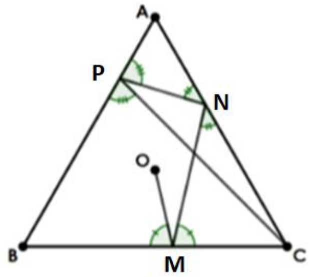


Logo, a área da região pintada de cinza na figura é igual a
   a) $\frac{3}{2}$ m²
   b) 1 m²
   c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ m²
   d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ m²
   e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m²

11) Foi pedido a João que calculasse a raiz quadrada de 961. Como João não sabia resolvê-la, ele calculou a raiz quadrada do algarismo mais à esquerda ($\sqrt{9}$=3), a raiz quadrada do algarismo mais à direita ($\sqrt{1}$ = 1) e os juntou, obtendo 31, que é justamente a raiz quadrada de 961! Para quantos naturais com pelo menos dois algarismos o método de cálculo de João para a extração da raiz quadrada funciona?
   a) 7
   b) 9
   c) 10
   d) 11
   e) 12

12) Seja N um número primo de três algarismos cujo resto da divisão por 8 é 7 e o resto na divisão por 5 é 2. A soma dos algarismos de N é um número cujo resto na divisão por 4 é 1 e o resto na divisão por 3 é 2. O valor de N é:
   a) 207
   b) 287
   c) 607
   d) 647
   e) 727

13) Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1m e baricentro O. Uma linha reta parte de O e sofre três reflexões sucessivas, uma em cada lado, nos pontos M, N e P. Considerando que em cada reflexão os ângulos de incidência e de reflexão possuem a mesma medida, qual o comprimento da linha poligonal OMNPC?



   a) $\frac{\sqrt{39}}{3}$ m
   b) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ m
   c) $\frac{5\sqrt{39}}{3}$ m
   d) $\frac{7\sqrt{3}}{6}\ m$
   e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\ m$

14) Considere a notação: $f^n(x) = \underbrace{f(f(f \ldots . f}_{n\ vezes}(x)$ Dada a função $f(x) = \frac{7x+8}{4x-7}$, o valor da expressão:
$\frac{f^2(1)\,.\ f^4(3)\,.\ f^6(5)\,.\ \ldots . f^{2020}(2019)}{f^2(2)\,.\ f^4(4)\,.\ f^6(6)\,.\ \ldots . f^{2018}(2018)}$ é igual a
   a) $\frac{1010}{1009}$
   b) $\frac{1009}{1010}$
   c) $\frac{1}{1009}$
   d) $\frac{1}{1010}$
   e) 1

15) João tem 21 carrinhos, sendo que mais da metade deles são azuis e um terço dos restantes são verdes. João brincou com todos os seus carrinhos durante uma semana inteira, utilizando exatamente 3 em cada dia, de modo que ele não usasse mais do que dois carrinhos azuis por dia. Quantos carros de João não são nem verdes nem azuis?
a) 3
b) 4
c) 6
d) 8
e) 12

16) Seja A uma matriz quadrada de ordem 5 cujos elementos são definidos pela relação: $a_{ij} = \frac{1}{min\{i,j\}}$.
O valor de $\sqrt{\frac{1}{20\, det(A)}}$ é
a) 12
b) 20
c) 28
d) 36
e) 40

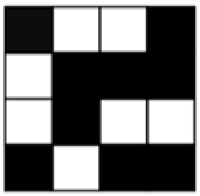
17) Considere o conjunto A de todos os números naturais positivos menores ou iguais a 2019 que deixam resto 3 na divisão por 7. Então, o valor da soma $\sum_{\alpha \in A} \quad i^{\alpha}$, onde i representa a unidade imaginária é
a) 1
b) -1
c) i
d) - i
e) 1+i

18) No campeonato interclasses de futebol do colégio de Marquinhos, os times jogaram no sistema de ida e volta, ou seja, cada equipe enfrentou a outra por duas vezes, e empates não são permitidos (se uma partida termina empatada, é realizada uma disputa de pênaltis para decidir o vencedor). Pelas regras, o vencedor ganha 2 pontos, e o perdedor ganha 1 ponto. Se ao final do campeonato o time de Marquinhos foi campeão e a soma dos pontos obtidos por todas as equipes foi 2019, quantos pontos o time de Marquinhos obteve?
a) 75
b) 81
c) 84
d) 87
e) 91

19) Considere a função $f: R \longrightarrow R - A$, com $A = \{x\ \varepsilon\ R \mid x \neq k\pi, k\varepsilon Z\}$, $definida\ por$:

$f(x) = \frac{1+cos(5x)}{4\, sen^2 x}$. O valor de f(x) para $x = \frac{\pi}{7}$ é igual a:
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
d) $\frac{1}{2}$
e) $\frac{1}{4}$

20) Dado um tabuleiro 4×4, pinta-se algumas de suas casas. A partir deste, cria-se uma matriz A de dimensões 4×4 cuja entrada aij é 1 se a respectiva casa que a representa está pintada e 0 se a casa não está pintada. Por exemplo, considere o tabuleiro abaixo e sua respectiva matriz:



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dizemos que o tabuleiro é esplêndido se o determinante da matriz A for não-nulo. Qual é o maior número possível de casas pintadas que um tabuleiro esplêndido pode ter?
a) 8
b) 10
c) 12
d) 13
e) 15