



- 1) Considere a sequência $1, 2, 3, 4, \dots, 1000$ dos números naturais de 1 a 1000. A seguir troque todos os números múltiplos de 3 por seus sucessores. Depois troque todos os números múltiplos de 7 da nova sequência pelos seus antecessores. Quantos termos da primeira sequência ainda aparecem, pelo menos uma vez, na última sequência obtida?



2) Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem 50 definidas pelas relações:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i > j \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i < j \\ 0, & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i > j \end{cases}$$

onde a_{ij} e b_{ij} representam os elementos da i -ésima linha e j -ésima coluna das matrizes A e B, respectivamente. Determine a matriz produto $P=AB$.



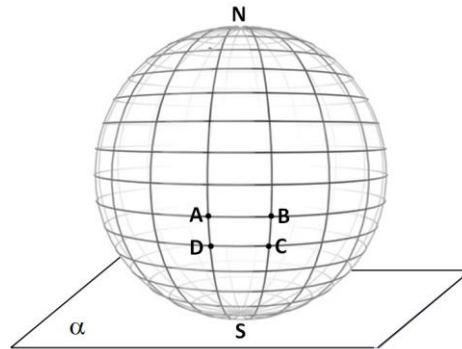
3) Qual o valor da soma infinita: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k \cos^k \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 3 \cos^3 \frac{\pi}{6} + \dots$



- 4) Considere um triângulo acutângulo não isósceles ABC com ortocentro num ponto H . Seja M o ponto médio do lado BC e N o ponto médio do segmento AH . Se $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ e $MN=x$, determine x em função de a , b e c .



- 5) Um dos possíveis tipos de projeções que podem ser utilizadas em cartografia é a chamada Projeção Polar, que consiste em escolher um polo, por exemplo o polo norte (N), e projetar cada ponto do globo sobre um plano tangente ao polo oposto, no caso o polo sul (S), através de uma reta que passa pelo polo norte e pelo ponto a ser projetado. Na figura abaixo, temos o globo terrestre e um quadrilátero ABCD com os lados sobre dois paralelos e dois meridianos,



Faça um esboço, não necessariamente em escala, da projeção ortogonal do quadrilátero ABCD sobre o plano α tangente ao globo no polo sul.



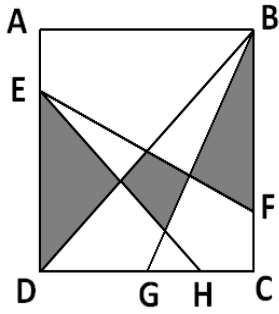
- 6) Sejam A e B dois números naturais pares, não nulos e distintos, sendo A um múltiplo de 4, tal que A-B é divisível por 7. Qual o resto da divisão do número $N = \frac{3A}{4} + B + 1$ por 7? Justifique.



- 7) Determine um número natural que quando multiplicado por 37 resulta num número cujos algarismos são iguais a 1, 6 ou 7, tendo pelo menos um algarismo igual a cada um deles.



- 8) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado cujo lado mede 4m, $AE=HC=CF=1m$ e $DG=2m$.



Determine a área da parte pintada da figura: