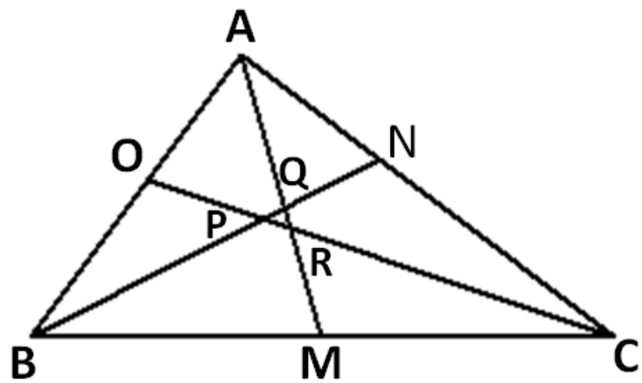
1) Seja ABC um triângulo retângulo, reto em A, onde AB=3m, AC=4m, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado BC, $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$ são as bissetrizes dos ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, o ponto P é a intersecção das bissetrizes $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$, e os pontos Q e R são, respectivamente, as intersecções da mediana $\overline{AM}$ com as bissetrizes $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$.



Determine a área do triângulo PQR.

2) Mostre que $\frac{2\pi}{9}$ é raiz da equação:

$$-96\cos^7 x + 16\cos^6 x + 152\cos^5 x - 24\cos^4 x - 66\cos^3 x + 10\cos^2 x + 6\cos x - 1 = 0$$

3) Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem 50 definidas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ , se } i < j \\ 0 \text{ , se } i = j \\ 1 \text{ , se } i > j \end{cases} \quad , \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , se } i < j \\ 0 \text{ , se } i \geq j \end{cases} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq 50$$

Se C é a matriz definida por $C = (AB)^T$,

a) Determine o elemento c_{89} .

b) Determine a matriz B=A², mostrando como seus elementos são obtidos.

4) Mostre que existem pelo menos dois primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6. Se a e b são dois desses números; isto é, primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6, qual é o resto da divisão do produto ab por 36?

5) João, Paulo, Maria e Ana são jovens de 20, 21, 22 e 23 anos, não necessariamente nesta ordem, que adoram matemática. Cada um deles tem como ídolo um grande matemático diferente (Fermat, Euler, Lagrange ou Gauss) e tem predileção por uma área diferente da matemática, não necessariamente a mesma de destaque do seu ídolo. Além disso, dedicam quantidades diferentes, uma, duas, três ou quatro, de horas de estudo por semana a essa área. A partir das informações abaixo, descubra a idade, o ídolo, a área predileta da matemática, e o número de horas semanais dedicadas a esta área, de cada um dos jovens.

a) A pessoa que adora geometria tem mais de 21 anos.

b) A pessoa que adora álgebra não tem 20 anos e seu ídolo não é Fermat nem Euler.

c) A pessoa cujo ídolo é Fermat dedica 1 hora de estudo a mais do que a pessoa que tem 22 anos, e uma hora a menos do que Paulo, cujo ídolo não é Euler nem Lagrange.

d) Maria, cujo ídolo não é Lagrange, é dois anos mais jovem que a pessoa que adora análise combinatória.

e) A pessoa que tem 20 anos dedica duas horas semanais a mais do que a pessoa de 21 anos.

f) O ídolo de Ana não é Lagrange.

g) A pessoa que adora análise combinatória não é Ana e dedica 4 horas semanais.

6) Considere a soma $S = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + ... + 2015.2016 2017.2018 + 2015$, composta de 2016 parcelas, em que as primeiras 2015 parcelas são do tipo $n.(n+1).(n+2).(n+3)$, para n=1,2...,2015, e a última parcela é igual a 2015. Mostre que a soma S pode escrita na forma:

$S = 405.2015^4 + 7.2015^3 + 10.2015^2 + 11687$

Dica: Podem ser úteis as relações

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

7) Determine as raízes do polinômio $x^3-\left(4+\sqrt{3}\right)x^2+\left(2+4\sqrt{3}\right)x-2\sqrt{3}=0$.

8) Listando todos os números inteiros de 1 a 2015, quantos deles têm a soma dos dígitos menor que 5? Justifique.