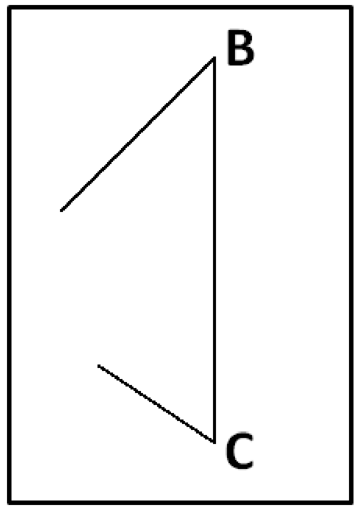
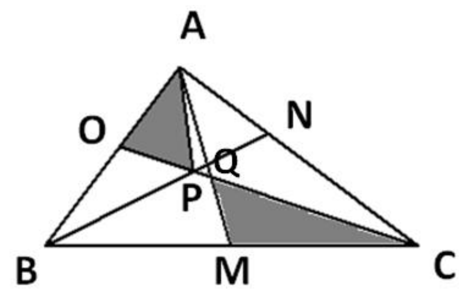
1) Para numerar as páginas de um livro, um editor resolveu utilizar apenas os números naturais pares, começando com o número 2; isto é, as páginas foram numeradas com os números naturais na sequência: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, etc. Se o número total de páginas do livro é 400, quantas vezes foi escrito o algarismo 0 na numeração das páginas?

2) A figura abaixo mostra uma página de uma prova de matemática contendo parte de um triângulo acutângulo ABC, em que o vértice A cai fora da página, do lado esquerdo.



Descreva um procedimento que permita, usando apenas um compasso e uma régua sem escala, determinar o ponto D do lado BC, tal que o segmento AD seja a altura do triângulo ABC, relativa ao lado BC.

3) Seja ABC um triângulo retângulo, reto em A, onde: AB=3m, AC=4m, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado BC, $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$ são as bissetrizes dos ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, o ponto P é a intersecção das bissetrizes $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$ e o ponto Q é a intersecção da bissetriz $\overline{CO}$ com a mediana $\overline{AM}$.



Determine a área da região pintada formada pelos triângulos AOP e CMQ.

4) Num torneio de futebol com 5 times, cada um deles enfrentou os outros 4, exatamente uma vez. A regra para pontuação foi a tradicional, se houver empate cada um ganha um ponto, e se houver um vencedor, este leva 3 pontos e o perdedor não ganha pontos. No final do torneio, verificou-se que somando todos os pontos obtidos por cada time, o resultado foi 23 pontos. É possível que um dos times tenha perdido todas as partidas? Justifique.

5) Sabendo que existem primos maiores que 10^6 que deixam restos diferentes quando divididos por 6, sejam a e b dois primos maiores que 10^6 e que deixam restos diferentes quando divididos por 6 . Qual é o resto da divisão do produto ab por 36?

6) João, Paulo, Maria e Ana são jovens de 20, 21, 22 e 23 anos, não necessariamente nesta ordem, que adoram matemática. Cada um deles tem como ídolo um grande matemático diferente (Fermat, Euler, Lagrange ou Gauss) e tem predileção por uma área diferente da matemática, não necessariamente a mesma de destaque do seu ídolo. Além disso, dedicam quantidades diferentes, uma, duas, três ou quatro, de horas de estudo por semana a essa área. A partir das informações abaixo, descubra a idade, o ídolo, a área predileta da matemática, e o número de horas semanais dedicadas a esta área, de cada um dos jovens.

a) A pessoa que adora geometria tem mais de 21 anos.

b) A pessoa que adora álgebra não tem 20 anos e seu ídolo não é Fermat nem Euler.

c) A pessoa cujo ídolo é Fermat dedica 1 hora de estudo a mais do que a pessoa que tem 22 anos, e uma hora a menos do que Paulo, cujo ídolo não é Euler nem Lagrange.

d) Maria, cujo ídolo não é Lagrange, é dois anos mais jovem que a pessoa que adora análise combinatória.

e) A pessoa que tem 20 anos dedica duas horas semanais a mais do que a pessoa de 21 anos.

f) O ídolo de Ana não é Lagrange.

g) A pessoa que adora análise combinatória não é Ana e dedica 4 horas semanais.

7) Mostre que:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo número natural $n \geq 1$.

b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ... + 2015^2 = 336 \times 2015 \times 2017$.

8) Listando todos os números inteiros de 1 a 2015, quantos deles têm a soma dos dígitos menor que 5? Justifique.