1) Sejam p e q dois números naturais tais que $p > q > 1$. Mostre que se q é um divisor de p, então $q \leq \frac{p}{2}$.

2) Um número natural é considerado SIMPÁTICO se for uma potência de 3; isto é, se pertencer ao conjunto $\{1, 3, 3^2, 3^3, \ldots\}$, ou puder ser escrito como soma de potências distintas de 3; por exemplo, os números $9 = 3^2$ e $13 = 1 + 3 + 3^2$ são simpáticos. Quantos números simpáticos existem de 1 a 2014?

3) Considere duas matrizes A e B quadradas de ordem 50 e definidas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i < j \\ 0, & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i > j \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se } i < j \\ 0, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i > j \end{cases}$$

onde a_{ij} e b_{ij} são os elementos da i-ésima linha e j-ésima coluna das matrizes A e B, respectivamente. Determine:

a) O elemento c_{89} da matriz $C = (AB)^T$; ou seja, da matriz transposta do produto AB.

b) O determinante da matriz A.

4) Para investigar o número de raízes reais de um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$, com coeficientes reais, existem algumas regras, que podem ser demonstradas. Entre elas, podemos citar: **Regra de Descartes:** O número de raízes reais positivas de P(x) nunca é maior que o número de trocas de sinal na sequência de seus coeficientes não nulos, e caso seja menor, então será sempre por uma diferença par; além disso, como as raízes negativas de P(x) são as raízes positivas de P(-x), então a mesma regra pode ser utilizada para investigar o número de raízes negativas de P(x), **Regra de Huat:** Se para algum índice k, $1 \leq k \leq n-1$, ocorrer $a_k^2 \leq a_{k-1} a_{k+1}$, então P(x) terá raízes complexas não reais. Considerando estas duas regras, investigue o número de raízes reais positivas, reais negativas e complexas não reais do polinômio com coeficientes reais não nulos: $P(x) = x^4 + p\, x^3 + x^2 + q\, x - 1$, para p no intervalo $]0,1[$, em função dos coeficientes p e q.

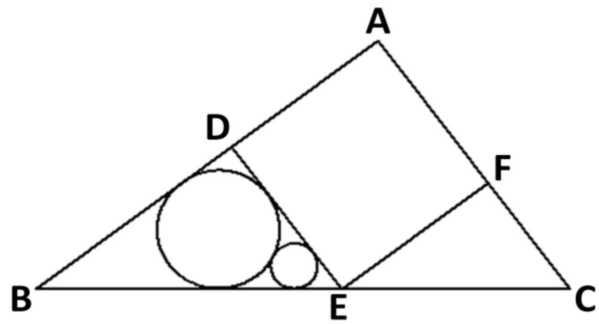
5) Considere quatro dados convencionais: um azul, um vermelho, um verde e um amarelo, em que cada face contém de 1 a 6 pontos, sendo que cada face contém um número de pontos diferente das demais. Lançando simultaneamente os quatro dados, quantas possibilidades existem em que a soma dos pontos dos quatro dados seja igual a 14?

6) Considere a sequência $2, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{6}, 8, \frac{1}{18}, \ldots$, onde os termos de ordem ímpar formam uma progressão aritmética (PA) e os termos de ordem par formam uma progressão geométrica (PG). Seja $f: N^* \to Q$ a função definida por: $f(n) = a_n$, onde a_n é o n-ésimo termo da sequência. Determine duas funções, $g: N^* \to Q$ e $h: N^* \to Q$, tais que $f(n) = g(n) + (-1)^n h(n)$, para todo $n \in N^*$.

7) Mostre que para todo $x \neq k\dfrac{\pi}{64}$, $k \in Z$:

$$\operatorname{tg}(x) + 2\operatorname{tg}(2x) + 4\operatorname{tg}(4x) + 8\operatorname{tg}(8x) + 16\operatorname{tg}(16x) + 32\operatorname{tg}(32x) = \operatorname{cotg}(x) - 64\operatorname{cotg}(64x)$$

8) Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, o círculo maior é tangente aos lados AB e BC do triângulo ABC e ao lado DE do quadrado, e círculo menor é tangente ao círculo maior, ao lado BC do triângulo ABC e ao lado DE do quadrado.



Se os catetos do triângulo ABC medem, respectivamente, $AB = 4\,\text{m}$ e $AC = 3\,\text{m}$, determine a área do círculo menor.