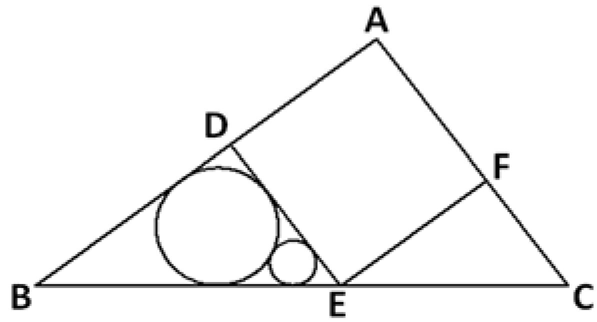
1) Mostre que existem apenas seis números naturais de três algarismos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321, com a propriedade de que a soma de seus algarismos é igual ao produto de seus algarismos.

2) Sejam p e q dois números naturais tais que $p > q > 1$. Mostre que se q é um divisor de p, então $q \leq \frac{p}{2}$.

3) Um número natural é considerado SIMPÁTICO se for uma potência de 3; isto é, se pertencer ao conjunto $\{1, 3, 3^2, 3^3, \ldots\}$, ou puder ser escrito como soma de potências distintas de 3; por exemplo, os números $9 = 3^2$ e $13 = 1 + 3 + 3^2$ são simpáticos. Quantos números simpáticos existem de 1 a 2014?

4) Na figura abaixo, o triângulo ABC é retângulo em A, ADEF é um quadrado, o círculo maior é tangente aos lados AB e BC do triângulo ABC e ao lado DE do quadrado, e círculo menor é tangente ao círculo maior, ao lado BC do triângulo ABC e ao lado DE do quadrado.



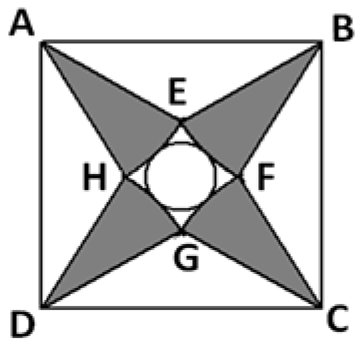
Se os catetos do triângulo ABC medem, respectivamente, $AB = 4\,m$ e $AC = 3\,m$, determine a área do círculo menor.

5) Considere quatro dados convencionais: um azul, um vermelho, um verde e um amarelo, em que cada face contém de 1 a 6 pontos, sendo que cada face contém um número de pontos diferente das demais. Lançando simultaneamente os quatro dados, quantas possibilidades existem em que a soma dos pontos dos quatro dados seja igual a 14?

6) Mostre que para todo $x \neq k\dfrac{\pi}{64}$, $k \in Z$:

$$\operatorname{tg}(x) + 2\operatorname{tg}(2x) + 4\operatorname{tg}(4x) + 8\operatorname{tg}(8x) + 16\operatorname{tg}(16x) + 32\operatorname{tg}(32x) = \operatorname{cotg}(x) - 64\operatorname{cotg}(64x)$$

7) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado de lado 4m. A parte pintada é composta de quatro setores circulares com centros nos vértices do quadrado, e tangentes a um círculo com centro no centro do quadrado e raio 0,5 m.



Se os pontos E, F, G e H são os pontos de intersecção dos setores pintados, determine a área da parte pintada do quadrado.

8) Considere duas matrizes A e B quadradas de ordem 50 e definidas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ , se } i < j \\ 0 \text{ , se } i = j \\ -1 \text{ , se } i > j \end{cases} \quad \text{e} \quad b_{ij} = \begin{cases} -1 \text{ , se } i < j \\ 0 \text{ , se } i = j \\ 1 \text{ , se } i > j \end{cases}$$

onde a_{ij} e b_{ij} são os elementos da i-ésima linha e j-ésima coluna das matrizes A e B, respectivamente. Determine:

a) O elemento c_{89} da matriz $C = (AB)^T$; ou seja, da matriz transposta do produto AB.

b) O determinante da matriz A.