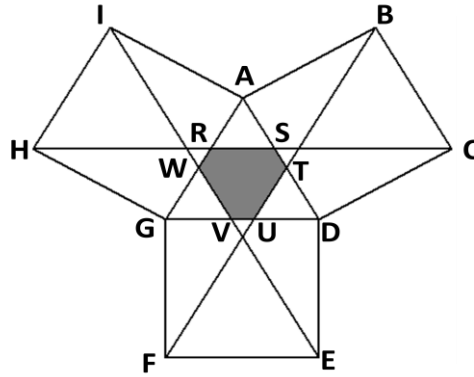




- 1) Na figura abaixo, AGD é um triângulo equilátero de lado $4m$; os quadriláteros $ABCD$, $AGHI$ e $DEFG$ são quadrados; R e S são as intersecções do segmento HC com os lados AG e AD do triângulo; T e U são as intersecções do segmento BF com os lados AD e DG do triângulo e V e W são as intersecções do segmento EI com os lados DG e AG do triângulo. Determine a área do hexágono $RSTUVW$.





- 2) Aproveitando um exercício da primeira fase, considere 100 portas numeradas de 1 a 100, estando alternadamente abertas ou fechadas: a primeira está fechada, a segunda está aberta, a terceira está fechada, e assim sucessivamente. Inicialmente João altera os estados das portas cujo número é um múltiplo de 3, abrindo as que estão fechadas e fechando as que estão abertas. A seguir Fernando faz o mesmo com as portas cujo número é um múltiplo de 5 e Maria, o mesmo com as portas cujo número é múltiplo de 7 . Concluídas as alterações feitas por João, Fernando e Maria, quantas portas estarão fechadas e quantas estarão abertas?



- 3) Um professor de matemática escreve seis números naturais não nulos e distintos em um caderno e faz as seguintes afirmações, todas verdadeiras, a respeito deles:
- a) Estão escritos três números primos, três números ímpares e três números pares.
 - b) Apenas um dos seis números é múltiplo de 3.
 - c) A média aritmética dos três pares é 12.
 - d) Nenhum deles é maior que 21.
 - e) A média aritmética dos três primos é 6.
 - f) Apenas um dos seis números é múltiplo de 5
 - g) Nenhum deles é múltiplo de 7.

Quais são estes números?



- 4) Seja γ uma circunferência de raio R e centro C .
- a) Se P é um ponto exterior a γ e r é uma reta que passa por P , mostre que se r é tangente à γ num ponto T , então: $PT^2 = PC^2 - R^2$, e se r é secante à γ e a intercepta nos pontos A e B , então: $PA \cdot PB = PC^2 - R^2$.
- b) Se P é interior à circunferência γ , ou P pertence a γ , e r é uma reta que passa por P e intercepta γ nos pontos A e B então: $PA \cdot PB = R^2 - PC^2$.



- 5) Um professor pede que seus alunos escrevam 2013 números naturais na lousa. Mesmo sem olhar os números escritos, o professor faz a seguinte afirmação: “Com certeza a soma dos números escritos é divisível por 2013, ou é possível apagar alguns números, deixando pelo menos um escrito na lousa, de forma que a soma dos números escritos restantes seja divisível por 2013”. É possível que o professor esteja errado? Justifique!



6) Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ||x^2 - 5x| - 6|$



- 7) Seja A o conjunto dos números naturais x tais que o resto da divisão de 2018 por x é 2 e o resto da divisão de 2031 por x é 3. Quantos elementos tem o conjunto A ?



- 8) É possível que num triângulo retângulo existam duas medianas tais que a medida de uma delas seja o dobro da medida da outra? Justifique.