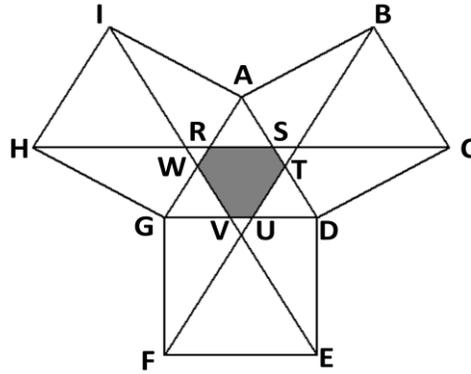




- 1) Seja  $A$  o conjunto dos números naturais  $x$  tais que o resto da divisão de 2018 por  $x$  é 2 e o resto da divisão de 2031 por  $x$  é 3. Quantos elementos tem o conjunto  $A$ ?



- 2) Na figura abaixo,  $AGD$  é um triângulo equilátero de lado  $4m$ ; os quadriláteros  $ABCD$ ,  $AGHI$  e  $DEFG$  são quadrados;  $R$  e  $S$  são as intersecções do segmento  $HC$  com os lados  $AG$  e  $AD$  do triângulo;  $T$  e  $U$  são as intersecções do segmento  $BF$  com os lados  $AD$  e  $DG$  do triângulo e  $V$  e  $W$  são as intersecções do segmento  $EI$  com os lados  $DG$  e  $AG$  do triângulo. Determine a área do hexágono  $RSTUVW$ .





- 3) João, Paulo e Maria colecionam selos. Se Maria tivesse dez selos a mais, teria  $\frac{1}{3}$  do número de selos de João e cinco selos a mais do que Paulo. Se juntos os três possuem 135 selos. Quantos selos tem cada um?



- 4) Aproveitando um exercício da primeira fase, considere 100 portas numeradas de 1 a 100, estando alternadamente abertas ou fechadas: a primeira está fechada, a segunda está aberta, a terceira está fechada, e assim sucessivamente. Inicialmente João altera os estados das portas cujo número é um múltiplo de 3, abrindo as que estão fechadas e fechando as que estão abertas. A seguir Fernando faz o mesmo com as portas cujo número é um múltiplo de 5. Concluídas as alterações feitas por João e Fernando, quantas portas estarão fechadas e quantas estarão abertas?



- 5) Um professor de matemática escreve seis números naturais não nulos e distintos em um caderno e faz as seguintes afirmações, todas verdadeiras, a respeito deles:
- a) Estão escritos três números primos, três números ímpares e três números pares.
  - b) Apenas um dos seis números é múltiplo de 3.
  - c) A média aritmética dos três pares é 12.
  - d) Nenhum deles é maior que 21.
  - e) A média aritmética dos três primos é 6.
  - f) Apenas um dos seis números é múltiplo de 5
  - g) Nenhum deles é múltiplo de 7.

Quais são estes números?

Observação: A média aritmética de três números é o resultado da divisão da soma dos três números por 3. Por exemplo, a média aritmética dos números 2, 4 e 9 é igual a 5, pois  $(2 + 4 + 9) : 3 = 5$ .



- 6) Um professor pede que seus alunos escrevam 2013 números naturais na lousa. Mesmo sem olhar os números escritos, o professor faz a seguinte afirmação: “Com certeza a soma dos números escritos é divisível por 2013, ou é possível apagar alguns números, deixando pelo menos um escrito na lousa, de forma que a soma dos números escritos restantes seja divisível por 2013”. É possível que o professor esteja errado? Justifique!



7) Considere a sequência  $\langle 1, 3, 7, 15, 31, \dots \rangle$  definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

Determine o centésimo termo da sequência.



- 8) É possível que num triângulo retângulo existam duas medianas tais que a medida de uma delas seja o dobro da medida da outra? Justifique.