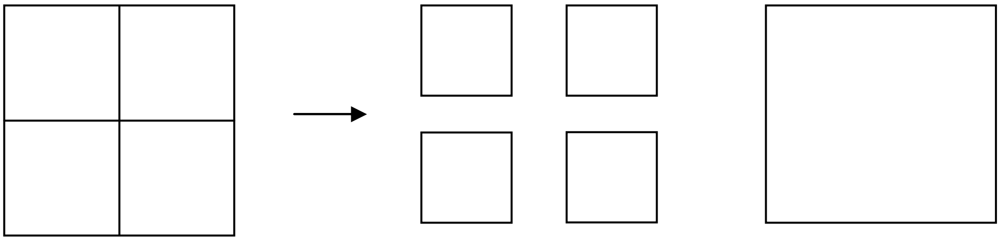
1) Três torneiras A, B e C quando ligadas sozinhas enchem um certo tanque em 30 min, 60 min e T min, respectivamente. Verifica-se que se ligarmos a torneira A, 5 min depois a torneira B e 5 min depois a torneira C, o tanque fica totalmente cheio em T-10 min. Determine T. Expresse T na forma: x min y s.

2) Considere um tabuleiro quadrado n x n. Prove que o número Q de quadrados que podem ser construídos com os lados apoiados sobre os lados das quadrículas do tabuleiro é dado por:

$$Q = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Por exemplo, para n = 2 podem ser construídos 5 quadrados:



3) Determine todos os inteiros cubos perfeitos da forma $9k+8$, onde k é um número inteiro. (exemplos de cubos perfeitos: $8=2^3$, $27=3^3$, $64=4^3$, $etc...$)

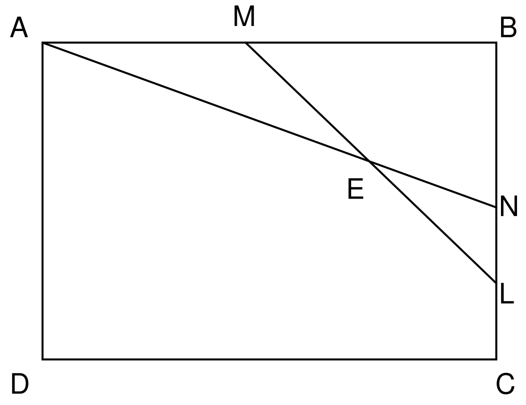
4) Numa urna existem 4 bolas vermelhas numeradas de 1 a 4, e 4 bolas azuis, também numeradas de 1 a 4. Procede-se às seguintes operações sucessivas:

I - Retira-se aleatoriamente uma bola da urna, anota-se a cor e o número, e devolve-se a bola para a urna.

II – Retira-se duas bolas simultaneamente da urna e anotam-se as cores e os números correspondentes de cada bola.

Qual a probabilidade de que tenham sido extraídas duas bolas da mesma cor e uma de cor diferente, sendo todas elas de numerações diferentes.

5) Na figura, ABCD é um retângulo, M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$, N é o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e L o ponto médio do segmento $\overline{NC}$. Se $AB = 4$ m e $BC = 2$ m, determine a soma das áreas dos triângulos AME e NEL.



6) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x < 1 \\ 3 - x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

determine a função $fofof : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $(fofof)(x) = f(f(f(x)))$.

7) Num tetraedro regular ABCD, de aresta 1 m, seja $\overline{AG}$ a altura relativa à face BCD, M um ponto de $\overline{AB}$, tal que $\overline{GM}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, e N o ponto médio da aresta $\overline{CD}$. Determine a área do triângulo MGN.

8) Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Calcule: $C.[(ABC) + (ABC)^2 + (ABC)^3 + ...].A$